



KARTA OPISU PRZEDMIOTU - SYLABUS

Nazwa przedmiotu

Algebra liniowa z geometrią analityczną I [S1MNT1>ALzGA1]

Przedmiot

Kierunek studiów

Matematyka nowoczesnych technologii

Rok/Semestr

1/1

Studia w zakresie (specjalność)

–

Profil studiów

ogólnoakademicki

Poziom studiów

pierwszego stopnia

Język oferowanego przedmiotu

polski

Forma studiów

stacjonarne

Wymagalność

obligatoryjny

Liczba godzin

Wykład

30

Laboratorium

0

Inne

0

Ćwiczenia

30

Projekty/seminaria

0

Liczba punktów ECTS

5,00

Koordynatorzy

prof. dr hab. inż. Paweł Kolwicz
pawel.kolwicz@put.poznan.pl

Wykładowcy

Wymagania wstępne

Podstawowe wiadomości z zakresu szkoły średniej. Umiejętność sprawnego wykonywania działań algebraicznych, znajomość zbiorów liczbowych oraz własności działań. Ma świadomość potrzeby poszerzania swoich kompetencji, gotowość do podjęcia współpracy

Cel przedmiotu

Poznanie podstaw rachunku liczb zespolonych. Poznanie rachunku macierzowego oraz wykorzystanie go do rozwiązywania układów równań liniowych. Poznanie podstaw teorii przestrzeni liniowych i operatorów linio- wych, nabycie umiejętności rozwiązywania zagadnienia własnego operatora liniowego. Posługiwanie się rachunkiem algebry wektorów do analizy prostej i płaszczyzny w przestrzeni

Przedmiotowe efekty uczenia się

Wiedza:

- ma wiedzę nt. pojęcia liczby zespolonej w różnych postaciach, nt. podstawowych pojęć teorii macierzy, teorii przestrzeni liniowych i operatorów liniowych, rozumie dowody ważniejszych, wybranych twierdzeń lub idee dowodów z powyższego zakresu [K_W01(P6S_WG), K_W03(P6S_WG)];
- ma wiedzę nt. podstawowych pojęć algebry wektorów, potrafi rozpoznać równania prostej i płaszczyzny

w przestrzeni [K_W01(P6S_WG), K_W03(P6S_WG)].

Umiejętności:

- ma umiejętność obliczania wyznaczników, potrafi wyznaczać rząd macierzy, macierz odwrotną, stosować rachunek macierzowy do rozwiązywania układów równań liniowych, rozpoznawać podprzestrzenie liniowe i wymiar przestrzeni liniowej, rozwiązywać zagadnienie własne operatora liniowego danego macierzą [K_U01(P6S_UW)];
- potrafi wyznaczać równanie prostej i płaszczyzny w przestrzeni z wykorzystaniem algebry wektorów, stosować podstawowy rachunek liczb zespolonych [K_U01(P6S_UW)].

Kompetencje społeczne:

- potrafi myśleć i działać w sposób matematycznie poprawny w obszarze algebry liniowej i geometrii analitycznej [K_K01(P6S_KK)];
- zna ograniczenia własnej wiedzy i rozumie potrzebę dalszego kształcenia, rozumie konieczność systematycznej pracy [K_K02(P6S_KK)].

Metody weryfikacji efektów uczenia się i kryteria oceny

Efekty uczenia się przedstawione wyżej weryfikowane są w następujący sposób:

Wykłady:

Próg zaliczeniowy: co najmniej 50% punktów. Zagadnienia na egzamin, na podstawie których opracowywane są pytania zostaną przesłane studentom drogą mailową z wykorzystaniem uczelnianych systemów elektronicznych.

- ocena wiedzy i umiejętności na egzaminie pisemnym sprawdzającym znajomość pojęć oraz umiejętność dowodzenia twierdzeń i ilustrowania teorii przykładami (możliwe także krótkie zadania praktyczne);
- uzyskiwanie punktów dodatkowych za aktywność podczas zajęć, w tym za przedstawienie referatów (omawiających dodatkowe aspekty zagadnień, w szczególności zastosowanie omawianej teorii w innych naukach lub nawiązanie do umiejscowienia w historii matematyki) oraz za uwagi dotyczące udoskonalenia materiałów dydaktycznych.

Ćwiczenia:

Wiedza nabyta w ramach ćwiczeń jest weryfikowana przez dwa kolokwia realizowane w ok. 7 i 15 tygodniu (alternatywnie 1 test na koniec semestru). Próg zaliczeniowy: co najmniej 50% punktów. Zasady zaliczania przedmiotu i dokładne progi zaliczeniowe zostaną przekazane studentom na początku semestru z wykorzystaniem uczelnianych systemów elektronicznych.

- ocenianie ciągle - premiowanie aktywności (dodatkowe punkty) przejawiającej się w dyskusji oraz we współpracy przy rozwiązywaniu zadań praktycznych;
- ocenianie ciągle - premiowanie przyrostu umiejętności posługiwania się poznanymi technikami;
- uzyskiwanie punktów dodatkowych za aktywność podczas zajęć, w tym za przedstawienie referatów (omawiających dodatkowe aspekty zagadnień, w szczególności zastosowanie omawianej teorii w innych naukach lub nawiązanie do umiejscowienia w historii matematyki) oraz za uwagi dotyczące udoskonalenia materiałów dydaktycznych;
- aktywny udział w konsultacjach pogłębiający wiedzę oraz ukierunkowujący dalszą pracę.

Treści programowe

Aktualizacja: 01.06.2025r.

Wykłady: zagadnienia teoretyczne (definicje, lematy, twierdzenia, wnioski, algorytmy) oraz odpowiednie przykłady dla zagadnień:

- liczby zespolone (postać algebraiczna, trygonometryczna i wykładnicza, działania na liczbach zespolonych, równania algebraiczne);

- ciała liczbowe, ciała abstrakcyjne. Przestrzenie liniowe, baza, wymiar. Przekształcenia (operatory) liniowe, wartości i wektory własne przekształcenia liniowego;

- macierze, wyznaczniki, układy równań liniowych, równania macierzowe, rząd macierzy, macierz odwrotna;

- algebra wektorów (iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany wektorów), prosta i płaszczyzna w przestrzeni.

Ćwiczenia: rozwiązywanie zagadnień praktycznych ilustrujących omawiane pojęcia oraz przykładowych problemów z wykorzystaniem aparatu teoretycznego z wykładu np.: wykorzystywanie postaci algebraicznej, trygonometrycznej lub wykładniczej do rozwiązywania równań algebraicznych, wyznaczanie zbiorów na płaszczyźnie zespolonej, wyznaczanie wymiaru przestrzeni liniowej, wyznaczanie współrzędnych elementu po zmianie bazy, badanie podprzestrzeni liniowych, badanie liniowości operatora i wyznaczanie macierzy

operatora w ustalonej bazie, rozwiązywanie zagadnienia własnego operatora, rozwiązywanie równań macierzowych, obliczanie wyznaczników, rozwiązywanie układów równań liniowych metodą Gaussa, wyznaczanie macierzy odwrotnej, rzędu macierzy, wykorzystanie rachunku algebry wektorów w geometrii do wyznaczania i analizy równania prostej i płaszczyzny.

Tematyka zajęć

Wykład

Liczby zespolone

1. Postać algebraiczna liczby zespolonej.
 2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej, wyprowadzenie z postaci algebraicznej.
 3. Postać wykładnicza liczby zespolonej.
 4. Działania na liczbach zespolonych: dodawanie, mnożenie i dzielenie w postaci algebraicznej i trygonometrycznej.
 5. Sprawdzić, że $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem.
 6. Sprzężenie liczby zespolonej i własności.
 7. Własności modułu iloczynu, ilorazu liczb zespolonych.
 8. Własności argumentu iloczynu, ilorazu i potęgi liczb zespolonych.
 9. Wzór Moivre'a.
 10. Pierwiatkowanie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej - twierdzenie z dowodem i interpretacja geometryczna.
 11. Równania algebraiczne w dziedzinie zespolonej i twierdzenie Gaussa.
- #### Rachunek macierzowy cz.1
12. Definicja macierzy, rodzaje macierzy, przykłady.
 13. Działania na macierzach: dodawanie macierzy, mnożenie macierzy przez liczbę, mnożenie macierzy przez macierz (definicje i własności).
 14. Definicja układu równań liniowych.
 15. Metoda eliminacji Gaussa.
 16. Definicja wyznacznika macierzy + wniosek - obliczenie wyznacznika macierzy stopnia 1,2 oraz 3.
 17. Twierdzenie o rozwinięciu Laplace'a dla wyznacznika.
 18. Własności wyznaczników.
 19. Układ Cramera - definicja i twierdzenie.
 - 19a. Macierz odwrotna- definicja i własności.
 20. Twierdzenie o wyznaczniku macierzy odwrotnej.
 21. Dwa twierdzenia o wyznaczaniu macierzy odwrotnej.
 22. Interpretacja układu równań (rozwiązania) w terminach macierzy (macierzy odwrotnej).
- #### Ciała i przestrzenie liniowe
23. Definicja ciała abstrakcyjnego, przykłady ciał.
 24. Definicja przestrzeni liniowej, przykłady.
 25. Kombinacja liniowa.
 26. Podprzestrzeń liniowa- definicja, przykłady.
 27. Definicja powłoki liniowej, przykłady.
 28. Wektory liniowo zależne i wektory liniowo niezależne- definicja oraz warunki równoważne; przykłady.
 29. Wymiar przestrzeni liniowej-definicja, przykłady.
 30. Baza przestrzeni liniowej-definicja, przykłady.
 31. Twierdzenie- warunek równoważny na to aby układ $B=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ był bazą.
 32. Twierdzenie o uzupełnieniu układu liniowo niezależnego do bazy.
- #### Rachunek macierzowy cz.2
33. Przestrzeń wierszy macierzy- definicja i twierdzenie o macierzach wierszowo równoważnych.
 34. Rząd macierzy- definicja oraz sformułowania równoważne.
 35. Twierdzenie Kroneckera-Capellego z dowodem oraz wniosek o liczbie rozwiązań.
 36. Układy jednorodne- definicja oraz dyskusja liczby rozwiązań na bazie Tw. Kroneckera-Capellego.

Przekształcenia liniowe, wartości i wektory własne przekształcenia liniowego

37. Definicja przekształcenia liniowego, przykłady.
38. Definicja jądra i obrazu przekształcenia liniowego.
39. Twierdzenie o reprezentacji operatora liniowego za pomocą macierzy.
40. Definicja wartości własnej i wektora własnego.

41. Definicja podprzestrzeni własnej oraz widma.
42. Równanie charakterystyczne i wielomian charakterystyczny macierzy- definicja.
43. Twierdzenie Cayleya-Hamiltona.
44. Suma algebraiczna przestrzeni liniowych.
45. Kowymiar podprzestrzeni liniowej.
46. Suma prosta przestrzeni liniowych. Twierdzenie o rozkładzie.
47. a) Operator rzutowania.
- b) Twierdzenie o macierzy operatora względem nowej bazy (macierz przejścia od jednej bazy do drugiej).
Twierdzenie o macierzy operatora względem bazy złożonej z jego wektorów własnych.
- b) Macierz kwadratowa ortogonalna. Twierdzenie o ortogonalnej diagonalizowalności rzeczywistej, symetrycznej macierzy kwadratowej.

Geometria analityczna

48. Wektor -definicja.
49. Długość wektora, cosinusy kierunkowe.
50. Prostokątny kartezjański układ współrzędnych w przestrzeni.
51. Wektory równoległe.
52. Wektory prostopadłe.
53. Dodawanie wektorów.
54. Mnożenie wektora przez liczbę.
55. Iloczyn skalarny- definicja i własności.
56. Iloczyn wektorowy- definicja i własności.
57. Iloczyn mieszany- definicja i własności.
58. Równanie parametryczne prostej l oraz równanie prostej w postaci proporcji podwójnej, gdy dany jest punkt $P \in l$ oraz wektor $v \parallel l$.
59. Równanie parametryczne prostej l przechodzącej przez dwa punkty $P_1, P_2 \in l$.
60. Równanie parametryczne prostej l gdy dane są płaszczyzny π_1, π_2 takie że $l = \pi_1 \cap \pi_2$.
61. Równanie płaszczyzny π , gdy dany jest punkt $P \in \pi$ oraz wektor $n \perp \pi$.
62. Równanie płaszczyzny π , gdy dany jest punkt $P \in \pi$ oraz wektory v_1, v_2 takie, że $v_1 \parallel \pi, v_2 \parallel \pi$ oraz v_1, v_2 nie są równoległe do siebie.
63. Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez 3 punkty niewspółliniowe.
64. Równanie płaszczyzny π zawierającej 2 proste równoległe i różne.
65. Równanie płaszczyzny π zawierającej prostą l i równoległej do prostej l' (proste l, l' nie są równoległe).
66. Postać odcinkowa płaszczyzny i jej związek z postacią ogólną.
67. Równanie płaszczyzny π zawierającej 2 proste przecinające się..
68. Kąt dwóch prostych.
69. Punkt wspólny dwóch prostych.
70. Kąt dwóch płaszczyzn.
71. Kąt prostej i płaszczyzny.
72. Odległość punktu od prostej.
73. Odległość dwóch prostych równoległych.
74. Odległość punktu od płaszczyzny.
75. Odległość dwóch płaszczyzn równoległych.
76. Odległość dwóch prostych skośnych.

Ćwiczenia

Rozwiązywanie zadań praktycznych z wykorzystaniem materiału przedstawionego na wykładzie

Metody dydaktyczne

Wykłady:

- wykład prowadzony na tablicy w sposób interaktywny z formułowaniem pytań do grupy studentów, wykład uzupełniony prezentacją komputerową;
- uwzględnia się aktywność studentów (przygotowanie referatów historycznych na temat matematyków związanych z przedstawianym materiałem, referaty na temat zastosowań algebry w naukach inżynierskich, przedstawianie dowodów pozostawionych do samodzielnego zrobienia) w czasie zajęć przy wystawianiu oceny końcowej;
- w trakcie wykładu inicjowanie dyskusji;

- teoria przedstawiana w powiązaniu z aktualną wiedzą studentów z poprzednich wykładów.
- Ćwiczenia:
- rozwiązywanie przykładowych zadań na tablicy;
 - szczegółowe recenzowanie rozwiązań zadań przez prowadzącego ćwiczenia i dyskusje nad komentarzami.

Literatura

Podstawowa:

- A. I. Kostrykin, Wstęp do algebry, cz.1 Podstawy algebry, PWN, Warszawa 2004;
- A. I. Kostrykin, Wstęp do algebry, cz.2 Algebra liniowa, PWN, Warszawa 2004;
- A. I. Kostrykin, Zbiór zadań z algebry, PWN, Warszawa 2005;
- M. Grzesiak, Liczby zespolone i algebra liniowa, Poznań 1999;
- T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, Algebra liniowa 1, Wrocław 2003;
- T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, Algebra liniowa 2, Wrocław 2005;
- F. Leja, Geometria analityczna, PWN, Warszawa 1961.

Uzupełniająca:

- H. Arodź, K. Rościszewski, Zbiór zadań z algebry i geometrii analitycznej dla fizyków, PWN, 1990;
- J. Rutkowski, Algebra liniowa w zadaniach, PWN.

Bilans nakładu pracy przeciętnego studenta

	Godzin	ECTS
Łączny nakład pracy	125	5,00
Zajęcia wymagające bezpośredniego kontaktu z nauczycielem	62	2,50
Praca własna studenta (studia literaturowe, przygotowanie do zajęć laboratoryjnych/ćwiczeń, przygotowanie do kolokwium/egzaminu, wykonanie projektu)	63	2,50